ЛА Марков 24.11.

Да се намери рангът на матрицата в зависимост от параметъра λ

б) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & \lambda & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 1 \\ 0 & 5 & \lambda+2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-3 & 0 \end{pmatrix}$

при $\lambda = 3 \Rightarrow r(A) = 2$

при $\lambda \neq 3 \Rightarrow r(A) = 3$

$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -\lambda & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 4 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 1+\lambda(1-\lambda) & \lambda-1-\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \sim$

$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -(\lambda^2-\lambda+3) & \lambda+\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

Ако при $\lambda = 1 \Rightarrow r(A) = 2$

Ако при $\lambda \neq 1 \Rightarrow r(A) = 4$

$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 2-\lambda & \lambda-2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & \lambda-2 \\ 0 & 2-\lambda & 2-\lambda & 1-\lambda^2+2\lambda+1 \end{pmatrix} \sim$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & 0 & \lambda-2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & \lambda-2 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-2)(\lambda+2) \end{pmatrix}$

Ако $\lambda = 2 \Rightarrow \text{ек}(A) = 1$

Ако $\lambda \neq 2 \Rightarrow$

1) $\lambda = -2 \Rightarrow \text{ек}(A) = 3$

2) $\lambda \neq -2 \Rightarrow \text{ек}(A) = 4$

Нека $V = M_n(F)$, S е множеството от всички симетрични матрици ($A^t = A$) и T е множеството от всички антисиметрични матрици ($A^t = -A$)

Да се докаже че:

1) S и T са ПП на V

2) $\dim S = \frac{n(n+1)}{2}$, $\dim T = \frac{n(n-1)}{2}$

3) $V = S \oplus T$

Нека $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in V$

Ако A е симетрична ($A \in S$) то

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ т.е $a_{ij} = a_{ji}$

Ако $A \in T$ то

$A^t = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & \dots & \dots & -a_{nn} \end{pmatrix}$ т.е $a_{11} = -a_{11} \Rightarrow 0$

Нека $A, B \in S$

$A+B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}+b_{n1} & \dots & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow (A+B)^t = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{n1}+b_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n}+b_{1n} & \dots & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix}$

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = c_{ji} = A+B \in S$

Наглаване

S е затворено относно събиране на матрици и умножение на матрица с число $\Rightarrow S \in$ ПП на V

при

$AB \in T \Rightarrow a_{ii} = 0,\ b_{ii} = 0,\ \forall i = \overline{1,n}$

$a_{ij} = -a_{ji},\ b_{ij} = -b_{ji} \quad \forall i,j = \overline{1,n}$

$$A + B = \{c_{ij}\}_{i,j=\overline{1,n}}$$

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

$\Rightarrow$ при $i = j \Rightarrow b_{ij} = a_{ij} = 0 \Rightarrow c_{ij} = 0 \quad \forall i,j = \overline{1,n}$

$\Leftarrow$ при $i \neq j \Rightarrow c_{ij} = -a_{ji} - b_{ji} = -(a_{ji} + b_{ji}) = -c_{ji}$

Нека $\lambda \in T \Rightarrow T \subseteq V$

T е затворено относно операциите събиране на матрици с число и умножение на матрици

$\Rightarrow T$ е ЛП на V

б) $A \in S \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ a_{1n} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$E_{11}, E_{22} \dots E_{nn}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \\ 1 & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} \quad \Big| \quad (E_{ij} + E_{ji})\ i < j$$

$a_{11}E_{11} + a_{22}E_{22} + \dots + a_{nn}E_{nn} + a_{12}(E_{12} + E_{21}) + a_{13}(E_{13} + E_{31})$

$1 + 2 + 3 \dots + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2}$

$$\dim S = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

α наложено за $T \Rightarrow (E_{12} - E_{21}) \dots (E_{ij} - E_{ji})$ за $i < j$

$$\dim T = \frac{n(n-1)}{2}$$

$a_{11}E_{11} - a_{nn}E_{nn}$ не се вимогват защото са 0

б) да проверим дали

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = B + C \text{ където } B \in S \text{ и } C \in T$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a_{22} & a'_{23} \\ a'_{13} & a'_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{12}-a'_{12} & a_{13}-a'_{33} \\ a_{21}-a'_{21} & 0 & a_{23}-a'_{23} \\ a_{31}-a'_{31} & a_{32}-a'_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

$$a_{12} + a_{21} = a'_{12} \Rightarrow V = S + T$$

$$\left.\begin{array}{l} A \in S \Rightarrow a_{ij} = a_{ji} \\ A \in T \Rightarrow a_{ij} = -a_{ij} \end{array}\right\} \Rightarrow a_{ij} = 0 \Rightarrow A = \mathcal{O}$$

$$\Rightarrow \dim V = n$$

$$\dim S+T = \dim S + \dim T - \dim (S \cap T)$$

$$n = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)}{2} + x$$

$$n = n + x \Rightarrow x = 0$$

$U = e(a_1 a_2 a_3 a_4)$

$a_1 = (2{,}8, -3{,}14)$ $a_2 = (-1\,2\,3\,5)$ $a_3 = (-1{,}14, 6{,}28)$ $a_4 = (0{,}12, 3{,}24)$

$$W: \begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ 10x_1 + 7x_2 - 8x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ полагаме $x_2 = p$ и $x_4 = q$

$\Rightarrow x_3 = -p$ $\quad x_1 = \frac{-7p + 8q}{10}$

$$\left(\frac{-7p+8q}{10}, p, -p, q\right)$$

при $p = 10$ и $q = 0 \Rightarrow b_1 = (-7, 10, -10, 0)$

при $p = 0$ и $q = 10 \Rightarrow b_2 = (8, 0, 0, 10)$

$W = e(b_1 b_2)$

$U + W = e(a_1 a_2 a_3 a_4 b_1 b_2)$

$$\begin{matrix} a_2 \\ a_3 \\ / a_1 \\ b_1 \\ / b_2 \\ / a_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 5 \\ -1 & 14 & 6 & 28 \\ 2 & 8 & -3 & 14 \\ -7 & 10 & -10 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 12 & 3 & 24 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 18 & \\ 0 & 0 & 30 & 27 \\ 0 & 0 & 10 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 18 & \\ 0 & 0 & 10 & 9 \end{pmatrix}$$

$a_2 a_3 b_1$ са ЛНЗ $\Rightarrow$ базис на $U + W$

$\dim(U + W) = 3$

$$\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 5 \\ -1 & 14 & 6 & 28 \\ 2 & 8 & -3 & 14 \\ 0 & 12 & 3 & 24 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 18 & \end{pmatrix}$$ базис на U

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0 \\ 4x_2 + x_3 + 8x_4 = 0 \end{cases}$$

полагаме $x_2 = p, x_4 = q \Rightarrow x_3 = -4p - 8q$

$x_1 = -10p - 19q$

$$(-10p - 19q, p, -4p - 8q, q)$$

при $p = 1 \quad q = 0 \Rightarrow c_1(-10, 1, -4, 0)$

при $p = 0 \quad q = 1 \Rightarrow c_2(-19, 0, -8, 1)$

$$U: \begin{cases} -10x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ -19x_1 - 8x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$U \cap W = \begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ 10x_1 + 7x_2 - 8x_4 = 0 \\ -10x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ -19x_1 - 8x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 10, 7, 0, -8 \\ -10, 1, -4, 0 \\ -19, 0, -8, 1 \\ 0, 1, 1, 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 10 & 7 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -21 & -14 \end{pmatrix}$$

$x_3 = p, \; x_4 = -3/2\,p, \; x_2 = -p, \; x_1 = -p/2$

$$(-p/2, -p, p, -3/2\,p)$$

при $p = 2$

$d_1 = (-1, -2, 2, -3)$ обр. базис на $U \cap W$

$$\underset{3''}{\dim(U+W)} = \underset{2''}{\dim U} + \underset{2''}{\dim W} - \underset{1''}{\dim(U \cap W)}$$

43.1) $U = L(a_1 a_2 a_3)$

$a_1(1211)$, $a_2(2310)$ $a_3(311-2)$

$W: \begin{cases} 28x_1 + 4x_2 - x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$

ФСР

$x_1 = q$, $x_4 = r$, $x_2 = p$ $\Rightarrow$ $x_3 = 28q + 4p - 5r$

при $p=1$ $q=0$ $r=0$ $\Rightarrow d_2(0,1,4,0)$

при $p=0$ $q=0$ $r=0$ $\Rightarrow d_2(1,0,28,0)$

при $p=0$ $q=0$ $r=1$ $\Rightarrow d_3(0,0,-5,1)$

$d_1 d_2 d_3$ е базис на W $\Rightarrow \dim W = 3$

$\dim U+W$

$$\begin{pmatrix} 1211 \\ 2310 \\ 311-2 \\ 0140 \\ 1028 \\ 00-51 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1211 \\ 0-1-1-2 \\ 0-5-2-5 \\ 0140 \\ 1028 \\ 00-51 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1211 \\ 0112 \\ 0085 \\ 0140 \\ 0-217 \\ 00-51 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1211 \\ 0112 \\ 0085 \\ 0140 \end{pmatrix}$$

$a_1 b_2 b_1 a_2$ образуват базис на $U+W$ $\Rightarrow$

$\dim(U+W) = 4$

$$U: \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1211 \\ 2310 \\ 311-2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1211 \\ 0-1-1-2 \\ 0-5-2-5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1211 \\ 0112 \\ 0035 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim U = 3$$

полагаме $x_3 = p \Rightarrow x_4 = -3/5\,p$, $x_2 = 1/5\,p$

$x_1 = -4/5\,p$

$(-4/5p, 1/5p, p, -3/5p)$

при $p = 5$

$x_3 = 5$, $x_1 = -4$, $x_2 = 1$, $x_4 = -3$

$C = (-4, 1, 5, -3)$

$U: -4x_1 + x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 0$

$$U \cap W \;\Big|\; \begin{matrix} -4x_1 + x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 0 \\ 28x_1 + 4x_2 - x_3 - 5x_4 = 0 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 5 & -3 \\ 28 & 4 & -1 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 11 & 34 & -26 \end{pmatrix}$$

$x_2 = p$ $\quad x_4 = q$

$x_3 = \dfrac{26q - 11p}{34}$, $\quad x_1 = \dfrac{-21p + 28q}{136}$

$$\left(-\frac{21p + 28q}{136}, p, \frac{26q - 11p}{34}, q\right)$$

$c_1 \Rightarrow p = 136 \quad q = 0$

$c_2 \Rightarrow p = 0 \quad q = 136$

$\Rightarrow \dim(U \cap W) = 2$

$\dim W = 3$, $\dim U = 3$, $\dim(U \cap W) = 2$

$\dim(U + W) = 4$